

文章编号: 1000-8055(2004)05-0630-06

气动声学直接数值模拟的空间 差分格式分析

杨爱玲, 谢翠丽, 陈康民

(上海理工大学 动力工程学院, 200093, 上海 200093)

摘要: 流场内声波的直接数值模拟对数值格式的耗散、色散特性提出了严格要求, 首先介绍了两种适于声学模拟空间差分格式——紧致差分格式与色散关系保持(DRP)格式的基本思想, 然后分析了格式的色散及其与四阶龙格-库塔法结合时的耗散特性。根据 Fourier 误差分析和数值模拟发现: 无论从格式可有效求解的波数范围还是从与龙格-库塔时间推进结合后的耗散特性来看六阶紧致格式的可有效求解范围要大于 DRP 格式; 不过, 数值计算表明紧致格式的计算量远远超过 DRP 格式, 对计算机资源提出了较高的要求。

关键词: 航空、航天推进系统; 计算气动声学; 紧致格式; 色散关系保持格式; 色散; 耗散

中图分类号: O 422. 6

文献标识码: A

On the Spatial Difference Schemes of Direct Simulation of Aeroacoustics

YANG Ai-ling, XIE Cui-li, CHEN Kang-min

(College of Power Engineering, Shanghai University of Science & Technology,
Shanghai 200093, China)

Abstract: Direct numerical simulation of aero-acoustics needs excellent numerical characteristics of spatial difference schemes such as dispersion relation and dissipation. The idea of compact finite difference scheme and Dispersion Relation Preserving (DRP) scheme is discussed first. Then, the dispersion characteristics and the dissipation characteristics of the two schemes are analyzed. The results show that either the solvable range of number of waves or the dissipation characteristics of the scheme combined with four-stage four-order Runge-Kutta method, the solvable range of the 6th-order compact scheme is larger than that of DRP scheme. However, the computational workload of the 6th-order compact scheme is far beyond DRP scheme.

Key words: aerospace propulsion system; Computational Aero-Acoustics (CAA); compact scheme; Dispersion Relation Preserving scheme (DRP scheme); dispersion; dissipation

流体流动伴随有气动噪声, 正确理解气动噪声的产生与辐射传播特性是噪声控制的前提条

件。计算气动声学(Computational Aero-Acoustics, 缩写 CAA)是近十几年来迅速发展起来的以气动

收稿日期: 2004- 01- 16; 修订日期: 2004- 06- 01

基金项目: 上海市科学技术委员会启明星计划资助项目(02QJ14031)

作者简介: 杨爱玲(1969-), 女, 湖南岳阳华容人, 上海理工大学动力学院副教授, 博士, 主要从事内流体力学、计算流体力学及计算声学研究

声学 and 计算流体力学为基础的新兴学科, 其首要任务就是设计适合气动声学问题的先进数值方法, 并用于流动噪声产生、传播过程的数值模拟, 获得气动噪声的产生机理与传播特性。与传统的计算流体力学(CFD)不同, CAA 所涉及的声学问题是非定常、小量级、具有大空间尺度分布的, 而且计算区域远大于流场计算域, 因此, 采用数值方法直接模拟气动噪声, 面临以下几个问题:

首先, 流场内存在 3 种物理波: 声波、涡波以及熵波。声波以声速向全场各方向辐射, 而熵波和涡波具有较强的方向性, 以与平均流相同的速度向下游传播, 但三者均以无耗散、无色散的方式传播。为了准确模拟上述物理波的特性, 仅仅相容、稳定的高精度格式并不能满足要求, 数值格式必须低耗散、无色散、各向同性。

其次, 声场脉动量级与平均场物理参数的量级相差十分悬殊, 有时甚至比紊流脉动的还要小 3~4 个量级。为此, 许多研究者先获得平均场解的基础上再求解线性化 Euler 方程获得声场的数值解^[1~3]。然而, 对于某些流场致声问题, 声源产生的一个重要机制就是非线性, 如未充分膨胀的超声气流离开拉伐尔喷管后将出现复杂的波系结构和啸叫噪声。对于这类问题, 必须直接求解非线性的 Euler 或 Navier-Stokes 方程才能获得正确的声场, 这对计算机的计算能力, 空间与时间离散格式的数值精度均提出了严格的要求, 否则, 计算误差噪声完全可能掩盖物理噪声^[4,5]。

声场的另一个特点就是空间尺度、时间尺度都有较宽的分布范围。众所周知, 流动本身就包括大尺度涡以及个各种小尺度粘性涡, 涡的尺度基本小于流场特征长度, 因此流场数值模拟所需要的计算域不大。而声波波长 λ 一般大于流场特征长度, 相比之下声场的计算域要大得多。例如, 为计算射流直径为 D 的超声射流噪声, 计算域的在每个方向上的范围至少接近 $25D \sim 45D$ 。庞大的计算域对数值格式的耗散、色散以及计算机资源提出了很高的要求。

为了解决上述问题, 人们首先基于 CFD 技术发展各种高精度格式如传统的高阶空间中心差分, 4 阶 MacCormack 格式和 ENO 格式来用于声的模拟; 后来又发展了更适于描述波状解的高精度格式, 如谱方法、Léle 的紧致格式^[6]、Tam & Webb 的色散关系保持(Dispersion Relation Preserving, 缩写 DRP)格式^[7]。Kim & Lee 利用 DRP 格式的基本思想在 Léle 格式的基础上获得了优

化的紧致格式^[8], 提高了格式的精度。我国的傅德薰先生进行了相关的研究, 提出了高精度迎风紧致型格式^[9,10]。根据研究资料来看, 以 Léle 的 5 点 6 阶紧致格式和 Tam & Webb 的七点 DRP 格式最著名, 在声学问题的直接模拟中应用最多。本文首先分别介绍 Léle 紧致格式与 DRP 格式的基本思想、色散关系与耗散特性, 然后利用简单的算例对 2 个格式进行了比较。

1 紧致格式

紧致格式与谱方法相似, 可以较好地模拟各尺度流动, 对计算网格的分布、边界形状的限制也不象谱方法那么严格, 而且可以利用较少的网格结点获得高精度空间差分近似, 因此多应用于非定常流的直接数值模拟(DNS)以及计算气动声学中。

对于一维对流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

在 x 方向取均匀网格, 网格步长为 Δx 。根据紧致格式方程(1)的空间一阶导数的离散形式如下^[6]:

$$\begin{aligned} & \beta f'_{j-2} + \alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} + \beta f'_{j+2} = \\ & c \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6\Delta x} + b \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4\Delta x} + \\ & c \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + b \end{aligned} \quad (2)$$

式中, f 表示函数 f 的空间一次微分, $\Delta x, j$ 分别为网格步长和网格标号。 α, β, a, b, c 则是格式的 5 个待定参数, 其数值确定了格式的精度以及格式所需要的格点数。把(2)式左右两边分别在结点 j 处 Taylor 展开, 然后根据展开式两边对应项系数相等确定待定参数。根据文献[6], 若所选择的待定参数保证 Taylor 展开式两边含 Δx^n 项的前面所有对应项的系数分别相等, 则紧致格式具有 n 阶精度。那么, 为获得 6 阶紧致格式, 则要求展开式两边 Δx 的幂次小于 6 的项的系数都对应相等, 然后求解线性方程组得到待定参数, 如 5 点 6 阶精度紧致格式的参数为: $\alpha = 1/3, \beta = 0, a = 14/9, b = 1/9, c = 0$ 。如果 j 方向的网格结点数为 N , 该格式可表示为:

$$\begin{aligned} & f'_{j-1} + 3f'_j + f'_{j+1} = \frac{1}{12\Delta x} \cdot \\ & (f_{j+2} - f_{j-2}) + \frac{7}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) \\ & 3 \leq j \leq N - 2 \end{aligned} \quad (3)$$

边界点及次边界点不能用上述格式, 根据相关研究经验及文献[6]的建议, 次边界点用具有 4 阶精度的 Pade 格式, 而边界点采用 3 阶精度的一侧紧致差分格式。综合后, f 在各网格点上的一次空间偏微分 f' 为:

$$Af' = \frac{1}{\Delta x} Bf \quad (4)$$

其中:

$$f' = [f'_1, f'_2, f'_3, \dots, f'_{N-2}, f'_{N-1}, f'_N]^T$$

$$f = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_{N-2}, f_{N-1}, f_N]^T$$

A, B 分别为 $N \times N$ 维的 3 对角矩阵和 5 对角矩阵。可见, 为了获得函数 f 在网格点的一次偏导数的差分近似, 必须进行大量的矩阵运算。

2 DRP 格式

波传播特性决定于其控制方程的色散关系, 因此, 只要声波控制方程(如 Euler 方程)的差分方程与原方程具有同样的色散关系, 那么差分方程就可准确模拟声波的传播特性, Tam & Webb 基于该思想提出了色散关系保持格式^[7]。要求差分方程和原控制方程的色散关系一致, 必须使二者的有效波数与角频率相等。为达到这一目的, Tam & Webb 不按传统方法仅依靠 Taylor 展开法来近似控制方程中的偏微分项, 而是采用 Fourier 变换法转换到波数频率空间后, 使差分方程与原方程波数差的平方最小来优化差分近似。这样, 差分格式能很好地保持原偏微分方程的波传播特性。

设模型方程(1)的一次空间偏微分在网格结点 j 处的有限差分近似为:

$$f'(x) \cong \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-n}^m a_l f(x + l\Delta x) \quad (5)$$

其中, $x = j\Delta x$ 。对(5)进行 Fourier 转换可以得到:

$$\omega \cong \frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-n}^m a_l e^{il\Delta x} \quad (6)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。上式左边为差分近似(5)的有效波数, 为区别起见下文用 ω 表示, 公式(6)表明差分格式的有效波数 ω 并不等于原波数 ω_0 而是它的周期性函数。若要求(5)能很好的模拟波长大于 $4\Delta x$ 的所有波, 根据色散关系保持思想, 则务必使差分近似差分式(5)的有效波数 ω 与原方程(1)的波数 ω_0 在 $|\omega\Delta x| < \pi/2$ 的范围尽可能接近, 即:

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\omega\Delta x - \omega_0\Delta x|^2 d(\omega\Delta x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \omega\Delta x - \left(-i \sum_{l=-n}^m a_l e^{il\Delta x} \right) \right|^2 d(\omega\Delta x)$$

有最小值, 然后根据最小值原理获得差分近似的各系数 a_l 。另外, 由(6)可知当 $n \neq m$ 时有效波数 ω 是 ω_0 复函数, 为了避免这一问题, 文献[7]建议采用 $n = m = 3$ 的对称色散保持格式(边界区域除外), 其系数如下^[5]:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = -a_{-1} = 0.770\ 882\ 380\ 518$$

$$a_2 = -a_{-2} = -0.166\ 705\ 904\ 415$$

$$a_3 = -a_{-3} = 0.020\ 843\ 142\ 770\ 3$$

该格式可模拟波长大于 $6\Delta x$ 的波。文献[5]还给出了边界格点的迎风 DRP 格式及其系数。

3 格式的色散关系及误差分析

由 Fourier 误差分析可知 5 点 6 阶紧致格式(3)的有效波数与原方程波数的关系为:

$$\omega' = \frac{28\sin(\omega\Delta x) + \sin(2\omega\Delta x)}{\Delta x [18 + 12\cos(\omega\Delta x)]} \quad (7)$$

根据公式(6)、(7)即可获得 DRP 格式、6 阶紧致格式的有效波数与原方程波数的关系曲线, 如图 1 示。图中横坐标是 $\omega\Delta x$, 纵坐标为 $\omega'\Delta x$ 。理想情况下, 差分格式的波数与原方程波数完全相等, 即图中的直线。图 1 表明无论 6 阶紧致格式还是 DRP 格式都只能准确模拟部分小波数范围内的波状解, 一旦超过此范围, 差分格式的有效波数 ω 越来越偏离原方程波数 ω_0 。这说明两个格式在模拟大波数波(短波)时存在较大的色散误差。从该图还可看出本文中紧致格式的有效求解波数范围 $(\omega\Delta x)_{\max}$ 约为 1.6 大于 DRP 格式的可有效求解波数 $((\omega\Delta x)_{\max} = 1.15)$ 。

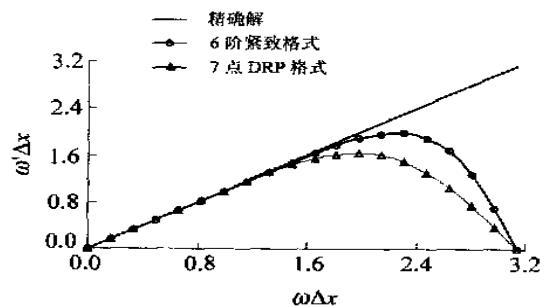


图 1 空间差分格式有效波数与原方程波数的关系曲线

Fig 1 The curves of numerical wave numbers of two schemes versus actual wave number

为了求解非定常的模型方程(1), 通常的时间推进格式为高精度龙格-库塔格式。即使采用的

是无耗散空间差分格式, 龙格-库塔法时间推进过程中仍然将伴随有耗散误差的产生^[11]。本文以 4 阶 4 步龙格-库塔时间推进格式为例, 由 Fourier 误差分析得到了该格式的增长因子:

$$g = 1 + R + \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{6} + \frac{R^4}{24}$$
$$|g| = \sqrt{\left[1 - 0.5\Delta t^2\omega^2 + \frac{1}{24}\Delta t^4\omega^4\right]^2 + \left[\Delta t\omega + \frac{1}{6}\Delta t^3\omega^3\right]^2}$$

如果 $|g|$ 大于 1, 格式不稳定, 小于 1 则存在耗散, 为了使格式稳定且具有足够的精度, $|g|$ 应小于 1 并尽可能接近 1。分别将公式(6)、(7)代入上式即可计算出 5 点紧致格式、DRP 格式与 4 步 4 阶龙格-库塔法结合时增长因子的模 $|g|$, 如图 2。从该图可知: 增长因子的模 $|g|$ 小于 1, 格式稳定; 对于 DRP 格式, $\omega\Delta x$ 大于 1.10 后 $|g|$ 减小; 而对于紧致格式, $\omega\Delta x$ 大于 1.80 后 $|g|$ 才开始减小。这说明 5 点紧致格式、DRP 格式与 4 步 4 阶龙格-库塔法结合时在高波数范围将产生耗散, 且随 CFL 数增加耗散越大; 该图还表明紧致格式不出现耗散所容许的波数远大于 DRP 格式。

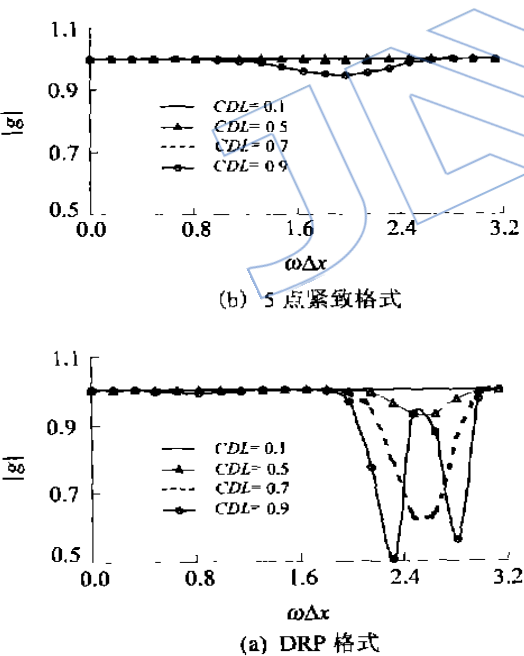


图 2 DRP 格式、紧致格式与 4 步 4 阶龙格-库塔法时间推进结合后的耗散特性

Fig 2 The dissipation errors of 6th-order compact scheme and DRP scheme combined with the four-order four-step Runge-Kutta scheme

对比图 1 和图 2 可知, 无论从格式可有效求解的波数范围还是与龙格-库塔时间推进结合后

其中 $R = -i\Delta t\omega'$, Δt 为时间步长。可见, R 是与空间差分格式有效波数相关的因子, 对于本文采用的 6 阶紧致格式和 DRP 格式增长因子为复数, 它的模为:

的耗散特性看, 5 点 6 阶紧致格式优于 DRP 格式。

4 计算结果

以网格步长为特征长度, 来流声速为特征速度无量纲模型方程(1), 令 $f = u_0$ 。然后分别采用 6 阶紧致格式和 DRP 格式对方程进行直接模拟。计算网格结点数 $N = 401$, 4 步 4 阶龙格-库塔法时间推进, 为了忽略边界处理带来的影响, 边界值由理论解直接给出, 计算采用的 CFL 数为 0.7。图 3(a) 给出了初场 $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/9)$ 、模型方程推进到 $10t_0$ 时刻的数值解, t_0 为特征时间, 其值等于网格步长与来流音速的比值。可见, 两种格式的数值解与理论解几乎完全重合; 且随时间推进, 这种规律依然不变, 如图 3(b)。

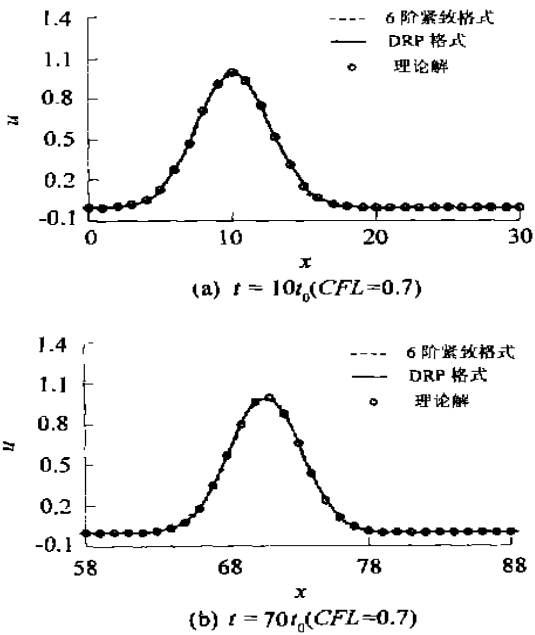


图 3 初场 $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/9)$ 时不同时刻的数值解与理论解

Fig 3 The Comparison of numerical and exact solutions with initial distribution $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/9)$

图 4 给出了初场 $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/4)$ 不同 CFL 时的计算结果。可见, 5 点 6 阶紧致格式的计算结果与理论解吻合较好, 仅仅在 $CFL = 0.7$ 时峰值附近产生了耗散; 而 DRP 格式即使在小 CFL 数时也产生了较大的误差, 这表明该紧致格式可有效求解的波数已超过了 DRP 格式的可有效求解范围。图 3、图 4 所示的计算结果与上文的色散及耗散特性分析吻合。

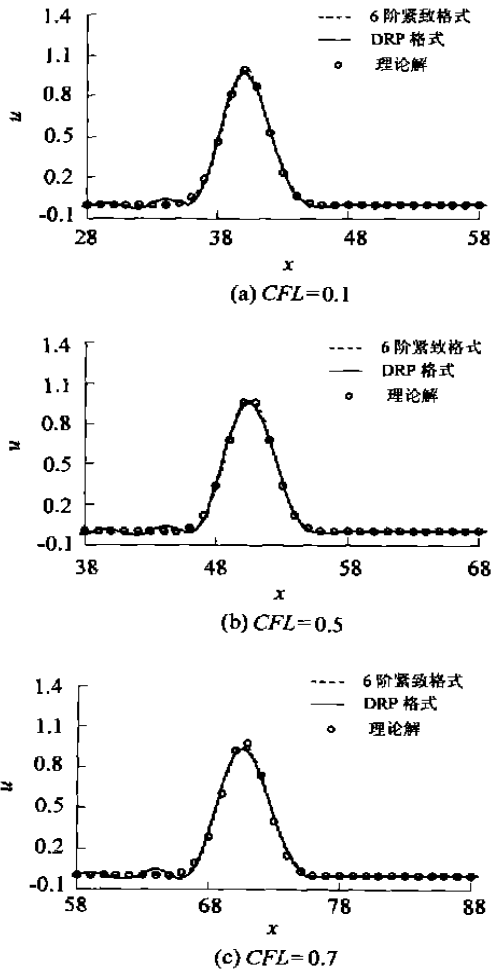


图 4 初场 $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/4)$ 时不同 CFL 数时的数值解与理论解

Fig 4 The comparison of numerical and exact solutions with initial distribution $u(x, 0) = \exp(-\ln 2 \times x^2/4)$ at different CFL number

本文在 $CFL = 0.1$ 、初场 $u(x, 0) = 0.5[H(x + 50) - H(x - 50)]$ 时对方程进行了数值模拟, 图 5 (a) 给出了推进到 $50t_0$ 时的数值解。可见无论 DRP 格式还是六阶紧致格式在模拟该矩形波时均出现了强烈的、非物理高频数值振荡。这是因为 DRP 格式与紧致格式都是纯粹的中心差分格式,

无法抑制因初场、边界存在间断引起的高频振荡之故。为了消除这些虚假的高频数值脉动, 应在格式中引入选择性人工粘性, 对格式可以正确模拟的长波不产生任何影响, 而高频短波一旦产生就能马上抑制。图 5 (b) 为采用一定选择性人工粘性后的数值解, 结果表明选择性人工粘性的作用是

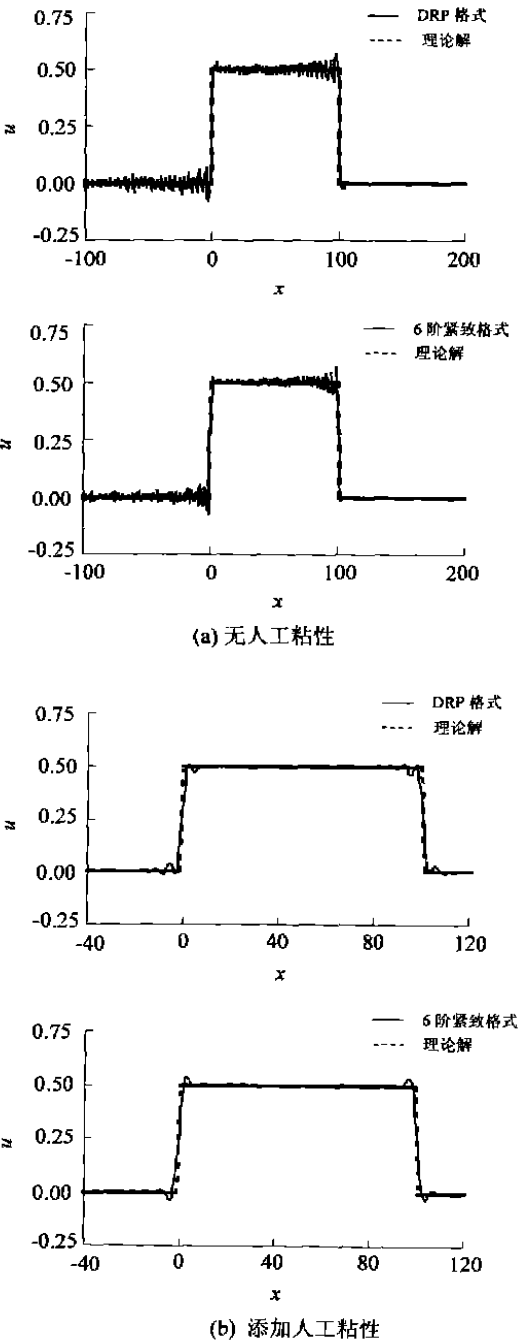


图 5 初场 $u(x, 0) = 0.5[H(x + 50) - H(x - 50)]$ 时的数值解

Fig 5 The numerical solutions with initial distribution $u(x, 0) = 0.5[H(x + 50) - H(x - 50)]$

十分明显的。文献[12]对如何添加选择性人工粘性作了详细的论述。DRP 格式与 6 阶紧致格式都是为流场非定常直接模拟提出的高精度格式,但从格式与龙格-库塔法结合后的耗散特性以及实际数值模拟看,6 阶紧致格式要优于 DRP 格式。不过,DRP 格式对一阶偏导数的模拟是显式,计算简便;而紧致格式获得函数的一次空间偏微分需要大量的矩阵运算,计算量大增。以本文计算为例,在同样的网格、 CFL 数、时间步长及初场条件下推进同样时间步紧致格式与 DRP 格式所用计算时间比接近 400:1。在声学计算中,随维数及网格数的增加计算量和计算时间本就十分庞大,因此选择差分格式时应综合考虑格式的精度要求与计算量大小。

5 结 论

根据 Fourier 方法和实际数值计算分析了 5 点 6 阶紧致格式与 DRP 格式的色散及其与 4 阶 4 步龙格-库塔法结合后的耗散特性,得到了以下结论:

(1) 5 点 6 阶紧致格式与 DRP 格式只能正确模拟小波数范围的波状解,在模拟大波数即短波时存在较大误差;且两格式分别与 4 阶 4 步龙格-库塔法结合后,在大波数范围都将出现耗散现象;

(2) 从格式可有效求解的波数范围及与龙格-库塔时间推进结合后的耗散特性看,5 点 6 阶紧致格式优于 DRP 格式;

(3) 紧致格式所要求的计算量远大于 DRP 格式。在进行声学计算时,应综合考虑格式的精度与计算量大小进行格式选择。

参考文献

[1] Mankbadi R R, Hixon R, Shih S H, Povinelli L A. Use of Lin-

- earized Euler Equations for Supersonic Jet Noise Prediction[J]. *AIAA Journal*, 1998, 36(2): 140-147.
- [2] Djambozom G, Lai C H, Pericleous K. Development of Numerical Techniques for Near-Field Aerodynamic Computations[J]. *International Journal for Numerical Method in Fluids*, 1999, 29: 719-731.
- [3] 李晓东, 高军辉. 二维平行剪切层声波产生和辐射的数值模拟[J]. *航空学报*, 2003, 24(1), 5-9.
- [4] Hao Shen, Tam C K W. Numerical Simulation of the Generation of Axisymmetric Mode Jet Screech Tones[J]. *AIAA Journal*, 1998, 36(10): 1801-1807.
- [5] Tam C K W. Computational Aeroacoustics: Issues and Methods[J]. *AIAA Journal*, 1995, 33(10): 1788-1796.
- [6] Lele S K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103: 16-42.
- [7] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 107: 262-281.
- [8] Jae Wook Kim, Duck Joo Lee. Optimized Compact Finite Difference Schemes with Maximum Resolution[J]. *AIAA Journal*, 1996, 34(5): 887-893.
- [9] 傅德薰, 马延文. 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟[J]. *空气动力学学报*, 1998, 16(1): 24-35.
- [10] 高慧, 马延文, 傅德薰. 六阶精度的群速度直接控制紧致格式及其应用[J]. *航空动力学报*, 2003, 18(1): 24-31.
- GAO Hui, MA Yan-wen, FU De-xun. Sixth Order Accurate Compact Scheme with Group Velocity Control and Application[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2003, 18(1): 24-31.
- [11] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124: 177-191.
- [12] Tam C K W, Webb J C. A Study of the Short Wave Components in Computational Acoustics[J]. *Journal of Computational Acoustics*, 1993, 1(1): 1-30.